

## Παραμετρικές Καμπύλες & Επιφάνειες

- Ανάγκη Μαθηματικής Περιγραφής Πολύπλοκων Καμπυλών για επεξεργασία με υπολογιστή:
  - Αυτοκινητιστική & Αεροναυπηγική βιομηχανία από μέσα δεκαετίας 1960.
  - Διάδοση κατασκευαστικών μηχανών καθοδηγούμενων από Η/Υ.
- Λύση: παραμετρικές αναπαραστάσεις καμπυλών και επιφανειών
  - P. de Casteljau, Citroën.
  - P. Bézier, Renault.
- Καμπύλες Bézier:
  - Ορισμός καμπύλης οποιουδήποτε βαθμού με απλό μαθηματικό τρόπο.
  - Χρήση σημείων ελέγχου.
  - Σχήμα εξαρτάται από σημεία ελέγχου.

## Παράσταση Καμπυλών

- Καμπύλη: σύνολο σημείων
  - Συνήθως δίνονται από μαθηματικές εξισώσεις.
- Αλγεβρική παράσταση καμπυλών με αλγεβρική εξίσωση:
  - Απλή μορφή  $y=f(x)$  π.χ. ευθεία  $y=mx+d$ .
  - Πεπλεγμένη μορφή  $g(x,y)=0$  π.χ. ευθεία  $ax+by+c=0$ .
- Κλίση επίπεδης καμπύλης: η παράγωγος του  $y$  ως προς  $x$   $\frac{dy}{dx}$ .

## Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Παραμετρική παράσταση: συντεταγμένες δίνονται με ξεχωριστές εξισώσεις με τη βοήθεια της ανεξάρτητης παραμέτρου  $t$ :

$$x=x(t)$$

$$y=y(t)$$

–  $t \in (-\infty, +\infty)$  ή περιορίζεται  $t \in [a, b]$ .

– Για κάθε τιμή του  $t$  παίρνουμε ένα σημείο της καμπύλης:  $\bar{P}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

- Π.χ. η ευθεία που διέρχεται από  $\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  και  $\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$  έχει παραμετρική εξίσωση:

$$x(t) = (1-t)x_1 + tx_2 \quad \text{με } t \in (-\infty, +\infty)$$

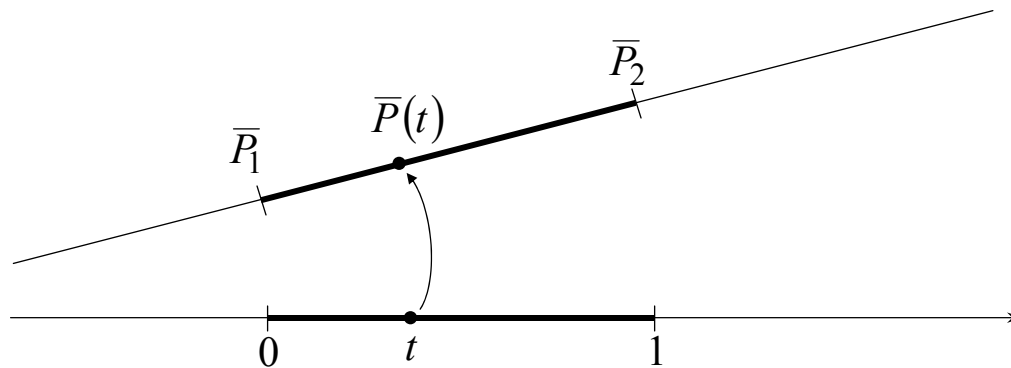
$$y(t) = (1-t)y_1 + ty_2$$

ή σε συνεπτυγμένη μορφή:

$$\bar{P}(t) = (1-t) \cdot \bar{P}_1 + t \cdot \bar{P}_2 \quad \text{με } t \in (-\infty, +\infty)$$

## Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Ευθύγραμμο τμήμα  $\bar{P}_1\bar{P}_2$  :  
$$\bar{P}(t) = (1-t) \cdot \bar{P}_1 + t \cdot \bar{P}_2 \text{ με } t \in [0, 1]$$
  - Για  $t=0$  παίρνουμε  $\bar{P}_1$  και για  $t=1$  παίρνουμε  $\bar{P}_2$  .
- Καθώς μεταβάλλεται η  $t$ , κινούμαστε πάνω στην ευθεία που ορίζεται από τα  $\bar{P}_1$  και  $\bar{P}_2$  .



- Αλγεβρική μορφή μπορεί να εξαχθεί από παραμετρική, αν απαλείψουμε  $t$ .
- Η κλίση δίνεται πάλι από 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} .$$

## Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Πλεονεκτήματα παραμετρικής παράστασης:
  - Περιγραφή κλειστών ή πλειότιμων καμπύλων.
  - Συντεταγμένες ανεξάρτητες μεταξύ τους  $\Rightarrow$  άμεση εφαρμογή συσχετισμένων μετασχηματισμών.
  - Εύκολη επέκταση σε περισσότερες διαστάσεις.
  - Ανεξάρτητη από σύστημα συντεταγμένων.

## Καμπύλες Bézier

- Η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος παρεμβάλλει γραμμικά τα  $\bar{P}_0$  και  $\bar{P}_1$

$$\bar{P}(t) = (1-t)\bar{P}_0 + t\bar{P}_1, \quad \text{με } t \in [0, 1]$$

- Κυρτός συνδυασμός των  $\bar{P}_0$  και  $\bar{P}_1$  ( $(1-t) + t=1$ ).

- Τετραγωνικές καμπύλες Bézier μεταξύ  $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$  :

- Εστω γραμμικές παρεμβολές μεταξύ  $\bar{P}_0, \bar{P}_1$  και  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$  .

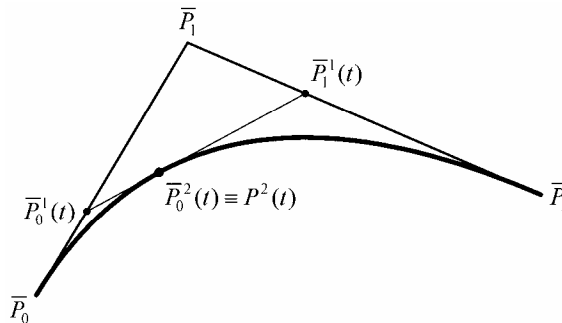
$$\bar{P}_0^1(t) = (1-t)\bar{P}_0 + t\bar{P}_1$$

$$\bar{P}_1^1(t) = (1-t)\bar{P}_1 + t\bar{P}_2, \quad t \in [0, 1].$$

- Η γραμμική παρεμβολή των  $\bar{P}_0^1(t)$  και  $\bar{P}_1^1(t)$  με τον ίδιο λόγο ( $t$ ), δίνει τετραγωνική συνάρτηση των αρχικών σημείων:

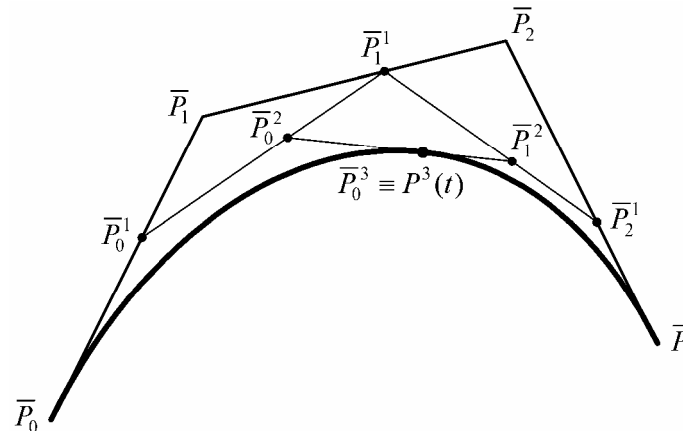
$$\begin{aligned} \bar{P}_0^2(t) &= (1-t)\bar{P}_0^1(t) + t\bar{P}_1^1(t) \\ &= (1-t)^2\bar{P}_0 + 2t(1-t)\bar{P}_1 + t^2\bar{P}_2 \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} \bar{P}_i \end{aligned}$$

- Τα αρχικά σημεία  $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$  ονομάζονται σημεία ελέγχου.



## Καμπύλες Bézier Βαθμού $n$

- Τρία διαδοχικά επίπεδα γραμμικής παρεμβολής τεσσάρων σημείων ελέγχου μας δίνουν καμπύλη Bézier βαθμού 3  $P^3(t)$ .



- Γενικά, με  $(n+1)$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_0, \bar{P}_1 \dots \bar{P}_n$  μπορούμε να κατασκευάσουμε καμπύλη Bézier βαθμού  $n$ ,  $P^n(t)$ .

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \bar{P}_i, \quad \text{με } t \in [0, 1]$$

## Υπολογισμός Σημείου Καμπύλης Bézier - De Casteljau

- Παραπάνω ορισμός είναι υπολογιστικά ασύμφορος.
- Αντίθετα τα βήματα γραμμικής παρεμβολής συμφέρουν.
- Αλγόριθμος De Casteljau: εύρεση σημείου καμπύλης Bézier για παραμετρική τιμή  $t$  :

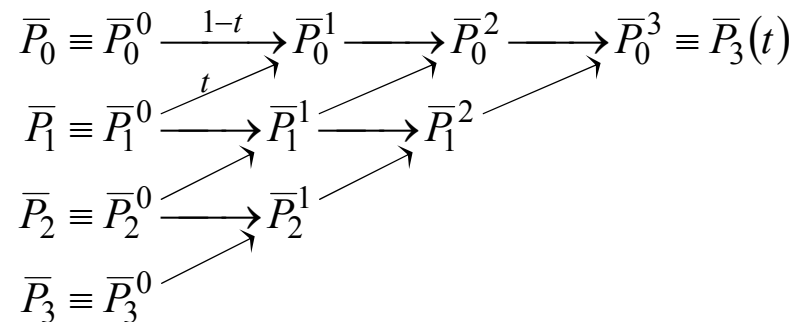
– Θέτουμε  $\bar{P}_i^0(t) = \bar{P}_i$ ,  $i = 0, 1 \dots n$  .

– Επαναληπτική σχέση:

$$\bar{P}_i^r(t) = (1-t) \cdot \bar{P}_i^{r-1}(t) + t \cdot \bar{P}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n \\ i = 0, 1, \dots, n-r \end{matrix}$$

–  $\bar{P}_0^n(t) \equiv P^n(t)$  είναι το ζητούμενο σημείο.

– Αυτός ο υπολογισμός καλείται και Τρίγωνο De Casteljau.





## Υπολογισμός Σημείου Καμπύλης Bézier - De Casteljau

- Αλγόριθμος De Casteljau: ψευδοκώδικας

```
point deCasteljauPoint (int n, point[] control_pts, float t)
{
  for (i=0; i<=n; i++)
    deCas_pts[i]=control_pts[i];

  for (r=1; r<=n; r++)
    for (i=0; i<=n-r; i++)
      deCas_pts[i]=(1-t)*deCas_pts[i]+t*deCas_pts[i+1];

  return deCas_pts[0];
}
```

- Για να σχεδιάσουμε ολόκληρη την καμπύλη, υπολογίζουμε ένα-ένα τα σημεία για  $t = 0(\Delta t)1$  και τα ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα.

## Πολυώνυμα Bernstein

- Οι συντελεστές των  $\bar{P}_i$  στην εξίσωση της καμπύλης Bézier είναι τα πολυώνυμα Bernstein:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Πολυώνυμα Bernstein βαθμού 2:

$$B_0^2(t) = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = 2t(1-t)$$

$$B_2^2(t) = t^2$$

- Πολυώνυμα Bernstein βαθμού 3:

$$B_0^3(t) = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = t^3$$

- Καμπύλη Bézier βαθμού  $n$  με χρήση πολυωνύμων Bernstein:

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \bar{P}_i$$

## Πολυώνυμα Bernstein - Χρήσιμες Ιδιότητες

- Αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων βαθμού  $n$ . Οποιοδήποτε πολυώνυμο  $f(t)$  βαθμού  $n$  γράφεται:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) c_i$$

όπου  $c_i$  κατάλληλοι συντελεστές

- Αρα κάθε πολυωνυμική καμπύλη βαθμού  $n$  μπορεί να γραφεί σε μορφή καμπύλης Bézier.
- Για κάθε  $n$  ισχύει:

$$B_i^n(t) \geq 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

- Τα πολυώνυμα Bernstein είναι συμμετρικά ως προς  $t$  και  $(1-t)$ :

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$$

## Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Προκύπτουν από εξίσωση ορισμού και ιδιότητες πολυωνύμων Bernstein.
- Ιδιότητα κυρτής περιβάλλουσας:
  - Καμπύλη Bézier είναι συσχετισμένος κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου.
  - Αρα βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων.
  - Χρήσιμη ιδιότητα για έλεγχο σχήματος καθώς και έλεγχο τομής με άλλα σχήματα.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς:
  - Αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.
  - Αρα για να μετασχηματίσουμε μια καμπύλη Bézier αρκεί να μετασχηματίσουμε τα σημεία ελέγχου της.
- Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς της παραμέτρου:
  - $t \in [0, 1] \rightarrow u \in [a, b]$
  - $u = a + (b - a)t$
  - $$\bar{P}_i^r(t) = \frac{b-u}{b-a} \bar{P}_i^{r-1}(t) + \frac{u-a}{b-a} \bar{P}_{i+1}^{r-1}(t)$$

## Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Συμμετρία: αν χρησιμοποιήσουμε τα σημεία ελέγχου με αντίστροφη σειρά  $\bar{P}_n, \bar{P}_{n-1} \dots \bar{P}_0$  η καμπύλη δεν αλλάζει:
  - Αντιστρέφεται η φορά σχεδίασης.
- Γραμμική ακρίβεια: αν όλα τα σημεία ελέγχου είναι συνευθειακά, η καμπύλη Bézier γίνεται ευθύγραμμο τμήμα.
- Παρεμβολή ακραίων σημείων: η καμπύλη περνά από τα ακραία σημεία  $\bar{P}_0$  και  $\bar{P}_n$  για  $t = 0$  και  $t = 1$ .
- Εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα: είναι παράλληλα προς τις ακραίες πλευρές του πολυγώνου ελέγχου:

$$\frac{d}{dt} P^n(0) = n(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$\frac{d}{dt} P^n(1) = n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$$

- Αν η καμπύλη ορίζεται σε τυχαίο διάστημα  $u \in [a, b]$  :

$$\frac{d}{du} P^n(a) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} P^n(0) = \frac{1}{b-a} n(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$\frac{d}{du} P^n(b) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{du} P^n(1) = \frac{1}{b-a} n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$$

$$\text{καθώς } u = a + (b-a)t \Leftrightarrow t = (u-a)/(b-a).$$

## Ιδιότητες Καμπυλών Bézier

- Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα:

$$\frac{d^2}{dt^2} P^n(0) = n(n-1)(\bar{P}_2 - 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} P^n(1) = n(n-1)(\bar{P}_n - 2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n-2})$$

- Αν η καμπύλη ορίζεται σε τυχαίο διάστημα  $u \in [a, b]$  :

$$\frac{d^2}{du^2} P^n(a) = \frac{1}{(b-a)^2} n(n-1)(\bar{P}_2 - 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0)$$

$$\frac{d^2}{du^2} P^n(b) = \frac{1}{(b-a)^2} n(n-1)(\bar{P}_n - 2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n-2})$$

- Ψευδο - τοπικός έλεγχος:

- Δεν υπάρχει τοπικός έλεγχος αφού τα  $B_i^n(t)$ , που είναι τα βάρη των σημείων ελέγχου, ορίζονται σε όλο το διάστημα της καμπύλης.
- Ομως το  $B_i^n(t)$ , και συνεπώς το  $\bar{P}_i$ , επηρεάζει μέγιστα το τμήμα της καμπύλης γύρω από  $t = i/n$ .

## Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bézier

- Αύξηση “ευελιξίας” καμπύλης Bézier:
  - Με αύξηση βαθμού (αστάθεια, αύξηση πολυπλοκότητας).
  - Με ομαλή συνένωση καμπυλών μικρού βαθμού (συνήθως 3 ή 4).
- Οι πολυωνυμικές καμπύλες  $F(t)$  με  $t \in [t_0, t_1]$  και  $G(t)$  με  $t \in [t_1, t_2]$  ενώνονται με συνέχεια  $C^r$  στο  $t_1$  αν οι παράγωγοι  $r$  τάξης είναι ίσες στο  $t_1$ :

$$F^{(r)}(t_1) = G^{(r)}(t_1)$$

- $C^r \Rightarrow C^m$  για  $0 \leq m < r$
- Για πολυώνυμο βαθμού  $k$  η  $k$ -οστή παράγωγος είναι σταθερά και οι μεγαλύτερες είναι 0.
- Άρα, για πολυώνυμο βαθμού  $k$  μας ενδιαφέρει μέχρι  $C^{k-1}$ .
- Εστω καμπύλες Bézier  $P^n(t), t \in [0, 1]$  και  $Q^m(t), t \in [1, 2]$  με σημεία ελέγχου  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$  και  $\bar{Q}_0 \dots \bar{Q}_m$  αντίστοιχα. Εστω ότι επιθυμούμε ένωση με  $C^2$ :

- $C^0 \Rightarrow \bar{P}_n = \bar{Q}_0$

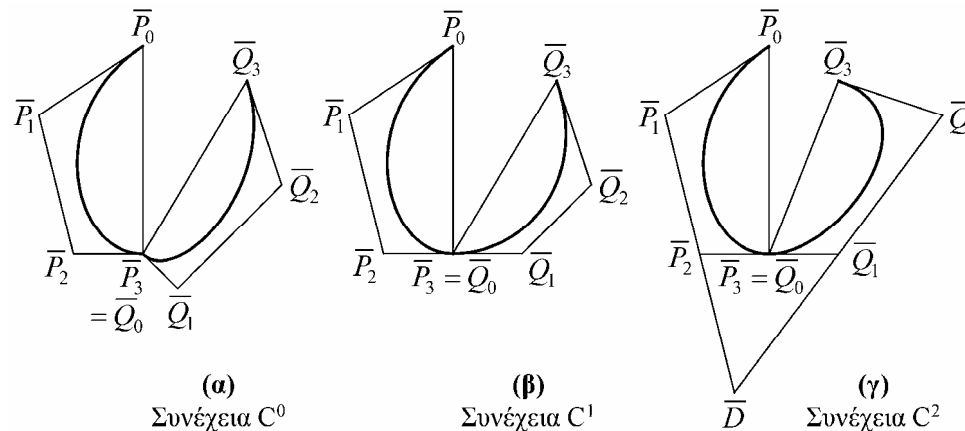
- $C^1 \Rightarrow n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}) = m(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0) \Leftrightarrow \bar{Q}_1 - \bar{P}_n = \frac{n}{m}(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$

( $\bar{Q}_1$  πρέπει να ανήκει στην ευθεία των  $\bar{P}_{n-1}$  και  $\bar{P}_n = \bar{Q}_0$  και να βρίσκεται στην απόσταση που ορίζεται)

- $C^2 \Rightarrow n(n-1)(\bar{P}_n - 2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n-2}) = m(m-1)(\bar{Q}_2 - 2\bar{Q}_1 + \bar{Q}_0)$  (καθορισμός  $\bar{Q}_2$ )

## Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bézier

- Παρατηρήσεις:
  - Αν  $n=m$ , η εξίσωση της  $C^1$  γίνεται  $\bar{Q}_1 - \bar{P}_n = \bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}$   
(δηλ. η απόσταση  $|\bar{Q}_1 \bar{P}_n| = |\bar{P}_n \bar{P}_{n-1}|$ )
  - Αν  $n=m=3$ , η εξίσωση της  $C^2$  γίνεται  $\bar{Q}_2 - 2\bar{Q}_1 = \bar{P}_1 - 2\bar{P}_2 (= \bar{D}$  έστω).  
Ισχύει:  $|\bar{D} \bar{P}_2| = |\bar{P}_2 \bar{P}_1|$  και  $|\bar{D} \bar{Q}_1| = |\bar{Q}_1 \bar{Q}_2|$ .



- Κάθε επιπλέον βαθμός συνέχειας που απαιτούμε καθορίζει τη θέση ενός σημείου ελέγχου της δεύτερης καμπύλης (περιορισμός).
  - » Για  $n=m=3$  με  $C^2$  η  $Q$  έχει ελεύθερο μόνο το  $\bar{Q}_3$ .



## Καμπύλες B-Spline

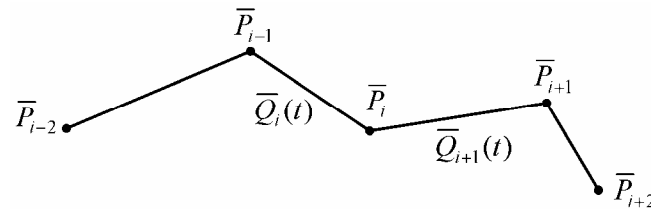
- Spline: καμπύλη που προκύπτει από ένωση επιμέρους καμπυλών με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας:
  - Αν επιμέρους καμπύλες είναι βαθμού  $k$ , μπορεί να απαιτηθεί ως  $C^{k-1}$ .
  - Βαθμός B-Spline = βαθμός επιμέρους καμπυλών.
- B-Spline: ορισμός με  $n+1$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$  :
  - Πλήθος σημείων ελέγχου είναι ανεξάρτητο από βαθμό  $k$ .
  - Εξαρτάται από πλήθος τμημάτων καμπύλης
  - Ορισμός τμημάτων σε παραμετρικά υποδιαστήματα  $[t_i, t_{i+1}]$  που ενώνονται στο  $[t_{\min}, t_{\max}]$ .
  - Κόμβοι: τιμές  $t_i$  της παραμέτρου στα όρια των υποδιαστημάτων.
  - Είναι απαραίτητοι και κόμβοι εκτός διαστήματος  $[t_{\min}, t_{\max}]$ .

$$t_{\text{first}} \leq \dots \leq t_{\min} \leq \dots \leq t_{\max} \leq \dots \leq t_{\text{last}}$$

- Πλήθος κόμβων εξαρτάται από βαθμό  $k$  και από πλήθος σημείων ελέγχου.

## Γραμμικές Καμπύλες B-Spline

- Αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα με συνέχεια  $C^0$ .



- Το τμήμα  $Q_i(t)$  στο υποδιάστημα  $[t_i, t_{i+1}]$  έχει άκρα τα  $\bar{P}_{i-1}$  και  $\bar{P}_i$ :

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \bar{P}_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- Αντίστοιχη γραμμικής παρεμβολής  $\bar{P}_{i-1}$   $\bar{P}_i$  για  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .
- Οχι εύχρηστη (γενική).

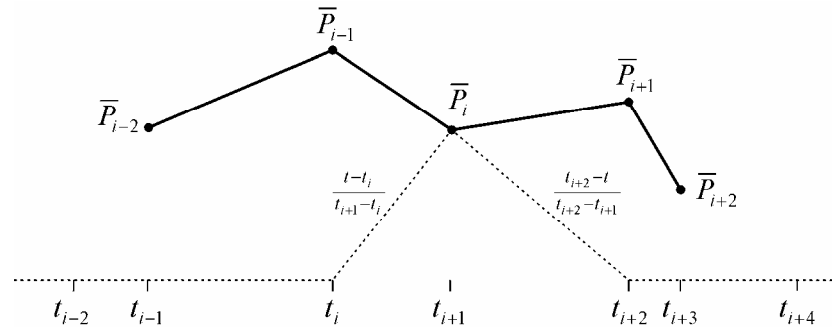
## Γραμμικές Καμπύλες B-Spline

- Σημείο  $\bar{P}_i$  επηρεάζει 2 τμήματα, τα  $\bar{Q}_i$  και  $\bar{Q}_{i+1}$

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

και

$$Q_{i+1}(t) = \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \bar{P}_i + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \bar{P}_{i+1}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$$



- Αν θέσουμε

$$N_i^1(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

τότε η επίδραση του  $\bar{P}_i$  στην καμπύλη είναι  $N_i^1(t) \cdot \bar{P}_i$  (ο εκθέτης δηλώνει βαθμό καμπύλης).

## Γραμμικές Καμπύλες B-Spline

- Αθροίζοντας τις επιδράσεις όλων των σημείων  $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$  παίρνουμε την εξίσωση της γραμμικής B-Spline:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^1(t) \cdot \bar{P}_i$$

- Πόσοι κόμβοι για  $n+1$  σημεία ελέγχου (δηλ.  $n$  τμήματα καμπύλης);
  - $Q_i(t) \mid i=1 \dots n$  ενώνει τα  $\bar{P}_{i-1}$  και  $\bar{P}_i$  για  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .
  - Αρα το διάστημα ορισμού είναι  $[t_1, t_{n+1}]$ .
  - Ομως από ορισμούς  $N_i^1(t)$  παρατηρούμε ότι χρειάζονται δύο επιπλέον ακραίοι κόμβοι  $t_0$  και  $t_{n+2}$ .
    - Έτσι τα  $\bar{P}_0$  και  $\bar{P}_n$  επηρεάζουν και αυτά 2 τμήματα καμπύλης.
    - Η τιμή των ακραίων αυτών κόμβων δεν έχει σημασία.

## Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

- Εστω το τμήμα 2<sup>ου</sup> βαθμού  $Q_i(t)$  που ορίζεται στο  $[t_i, t_{i+1}]$ :
  - Ορίζεται από 3 σημεία ελέγχου:  $\bar{P}_{i-2}, \bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i$  με 2 βήματα γραμμικής παρεμβολής.
  - Το πρώτο βήμα παρεμβάλλει τα  $\bar{P}_{i-2}, \bar{P}_{i-1}$  και  $\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i$  στα διαστήματα  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$  και  $[t_i, t_{i+2}]$  αντίστοιχα (και όχι στο  $[t_i, t_{i+1}]$  όπως στις Bézier).

$$\bar{Q}_{i-1}^1(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} \bar{P}_{i-2} + \frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} \bar{P}_{i-1}, \quad t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$$

$$\bar{Q}_i^1(t) = \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+2}]$$

- Το δεύτερο βήμα παρεμβάλλει τα σημεία της πρώτης γραμμικής παρεμβολής  $\bar{Q}_{i-1}^1(t)$  και  $\bar{Q}_i^1(t)$  στο διάστημα  $[t_i, t_{i+1}]$ .

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \bar{Q}_{i-1}^1(t) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \bar{Q}_i^1(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- Με αντικατάσταση των  $\bar{Q}_{i-1}^1$  και  $\bar{Q}_i^1$  στην  $Q_i$  παίρνουμε έκφραση συναρτήσεων των σημείων ελέγχου (ορίζεται στο  $[t_i, t_{i+1}]$ ).

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} \bar{P}_{i-2} + \left( \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} \right) \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_i$$

## Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

- Αν εξετάσουμε 2 διαδοχικά τμήματα B-Spline  $Q_i(t)$  με  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  και  $Q_{i+1}(t)$  με  $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$  στην κοινή τιμή παραμέτρου  $t=t_{i+1}$  παρατηρούμε ότι:

$$Q_i(t_{i+1}) = Q_{i+1}(t_{i+1})$$

$$Q'_i(t_{i+1}) = Q'_{i+1}(t_{i+1}) \quad \text{δηλαδή έχουμε συνέχεια } C^0 \text{ και } C^1.$$

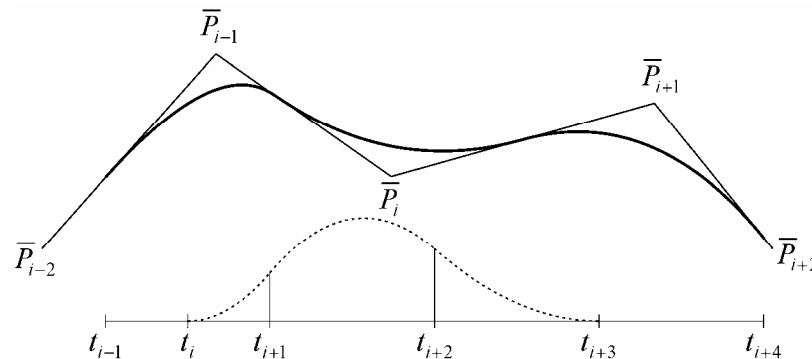
- Θα δώσουμε έκφραση ολόκληρης της τετραγωνικής B-Spline συναρτήσεως των σημείων ελέγχου της:

- Το  $\bar{P}_i$  επηρεάζει τα τμήματα  $Q_i(t)$ ,  $Q_{i+1}(t)$  και  $Q_{i+2}(t)$ .

$$Q_i(t) = a_i \bar{P}_{i-2} + b_i \bar{P}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} \bar{P}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$Q_{i+1}(t) = a_{i+1} \bar{P}_{i-1} + \left( \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} \right) \bar{P}_i + c_{i+1} \bar{P}_{i+1}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$$

$$Q_{i+2}(t) = \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}} \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} \bar{P}_i + b_{i+2} \bar{P}_{i+1} + c_{i+2} \bar{P}_{i+2}, \quad t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$$



## Τετραγωνικές Καμπύλες B-Spline

– Ορίζουμε:

$$N_i^2(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+2}} + \frac{t-t_{i+2}}{t_{i+2}-t_{i+1}} \frac{t-t_{i+3}}{t_{i+3}-t_{i+2}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ \frac{t-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+2}} \frac{t-t_{i+3}}{t_{i+3}-t_{i+2}}, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

– Οπότε η B-Spline με σημεία ελέγχου τα  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$  γράφεται:  $Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^2(t) \cdot \bar{P}_i$

- Πρώτα σημεία ελέγχου είναι τα  $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ . Άρα πρώτο τμήμα καμπύλης είναι το  $Q_2(t)$  με κόμβους  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .
- Αντίστοιχα τελευταίο τμήμα είναι το  $Q_n(t)$  που απαιτεί τα  $\bar{P}_{n-2}, \bar{P}_{n-1}, \bar{P}_n$  και τους κόμβους  $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$ .
- Γενικά μια τετραγωνική B-Spline με  $(n+1)$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$  χρειάζεται  $(n+2)$  κόμβους  $t_1 \dots t_{n+2}$ :
  - Για ικανοποίηση των παραπάνω σχέσεων χρειάζονται και 2 πλασματικοί κόμβοι  $t_0$  και  $t_{n+3}$  που δεν επηρεάζουν την καμπύλη.
  - Διάστημα ορισμού της καμπύλης είναι το  $[t_2, t_{n+1}]$ .

## Καμπύλες B-Spline βαθμού $k$

- Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$N_i^2(t) = \frac{t-t_1}{t_{i+2}-t_i} N_i^1(t) + \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} N_{i+1}^1(t)$$

- Γενικεύοντας, οι συναρτήσεις B-Spline βαθμού  $k$  ορίζονται αναδρομικά:

$$N_i^r(t) = \frac{t-t_1}{t_{i+r}-t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1}-t}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, k \\ i = 0, 1, \dots, n+k-r \end{array}$$

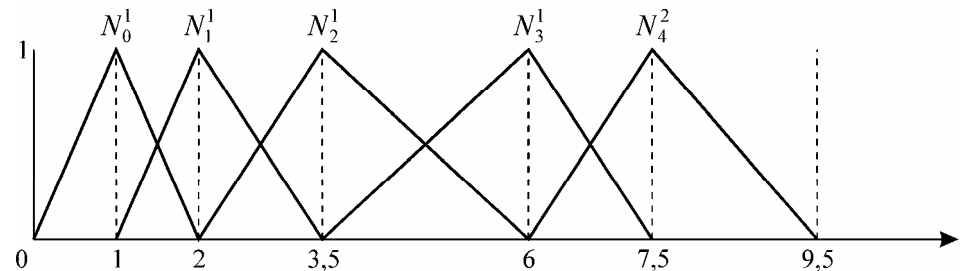
θέτοντας σαν συνθήκη διακοπής της αναδρομής τις B-Spline βαθμού 0:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n+k \quad \text{με αντιμετάθεση του 0 και 1}$$

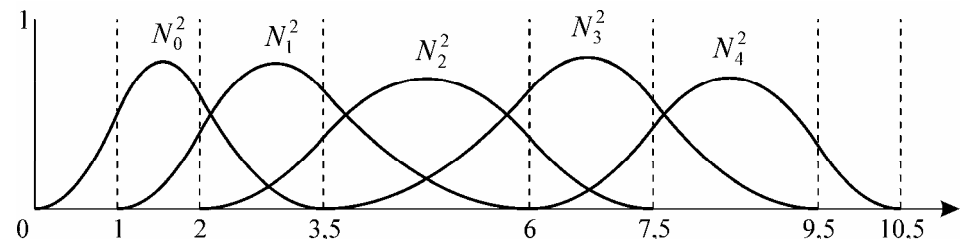


## Καμπύλες B-Spline βαθμού $k$

- Το  $N_i^r(t)$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $r$  ως προς  $t$ :
  - Έχει “τοπική στήριξη” στο διάστημα  $[t_i, t_{i+r+1})$  δηλ. είναι μηδενικό εκτός αυτού του διαστήματος.
  - Διαδοχικά  $N_i^r(t)$  [ $i = 0 \dots n + k - r$ ] ενώνονται με συνέχεια  $C^{r-1}$  στα σημεία που η παράμετρος  $t$  παίρνει τις τιμές των κόμβων.
  - Π.χ. γραμμικές B-Spline ( $k=1$ ) για  $n=4$ :



- Π.χ. τετραγωνικές B-Spline ( $k=2$ ) για  $n=4$ :



## Καμπύλες B-Spline βαθμού $k$

- Η κατασκευή ενός τμήματος  $Q_i(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  της B-Spline βαθμού  $k$  γίνεται με  $k$  επίπεδα γραμμικής παρεμβολής:
  - Το πρώτο επίπεδο χρησιμοποιεί  $k+1$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_{i-k} \dots \bar{P}_i$ .
    - Παρεμβολή των σημείων αυτών κατά ζεύγη μας δίνει ευθύγραμμα τμήματα, ένα σημείο των οποίων ορίζεται ως  $\bar{Q}_j^1(t)$ ,  $j = i - k + 1 \dots i$  με διάστημα ορισμού  $[t_j, t_{j+k}]$ .
  - Κάθε επόμενο επίπεδο  $r=2, 3, \dots, k$  χρησιμοποιεί σημεία του προηγούμενου επιπέδου για την κατασκευή του  $\bar{Q}_j^r(t)$ ,  $j = i - k + r \dots i$  με διάστημα ορισμού  $[t_j, t_{j+k-r+1}]$ .
  - Μετά από  $k$  βήματα καταλήγουμε στο  $\bar{Q}_i^k = Q_i(t)$  βαθμού  $k$  και ορισμένο στο διάστημα  $[t_i, t_{i+1}]$ .
  - Διαδοχικά  $Q_i(t)$  ενώνονται με συνέχεια  $C^{k-1}$ .

- Μία καμπύλη B-Spline βαθμού  $k$  με  $(n+1)$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$  γράφεται:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) \cdot \bar{P}_i$$

- Αποτελείται από  $(n-k+1)$  πολυωνυμικά τμήματα βαθμού  $k$  ( $Q_i(t)$ ,  $i=k \dots n$ ) καθένα ορισμένο στο διάστημα  $[t_i, t_{i+1}]$ .
- Συνολικό πεδίο ορισμού είναι το  $[t_k, t_{n+1}]$ .
- Συνολικά απαιτούνται  $(n+k)$  κόμβοι  $t_1 \dots t_{n+k}$  (συν δύο πλασματικοί στα άκρα  $t_0, t_{n+k+1}$ ).
  - Πρέπει να ισχύουν  $t_i \leq t_{i+1}$  και  $t_i < t_{i+k}$ .

## Καμπύλες B-Spline βαθμού $k$

- Υπολογισμός σημείων B-Spline - Αλγόριθμος de Boor:
  - Επαναληπτική μέθοδος αντίστοιχη de Casteljau για B ezier
  - Βασίζεται στα βήματα γραμμικής παρεμβολής.
- Εστω ότι θέλουμε το σημείο  $Q(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  για B-Spline βαθμού  $k$  με σημεία ελέγχου  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$

– Θέτουμε:  $\bar{Q}_j^0(t) = \bar{P}_j$ ,  $j = i - k, i - k + 1, \dots, i$

$$\text{και } \bar{Q}_j^r(t) = \left( \frac{t_{k-r+1+j} - t}{t_{k-r+1+j} - t_j} \right) \bar{Q}_{j-1}^{r-1}(t) + \left( \frac{t - t_j}{t_{k-r+1+j} - t_j} \right) \bar{Q}_j^{r-1}(t), \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, k \\ j = i - k + r, i - k + r + 1, \dots, i \end{array}$$

– Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το  $Q(t) = \bar{Q}_i^k(t)$ .

- Π.χ. τρίγωνο de Boor για  $k=3$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{P}_{i-3} & = & \bar{Q}_{i-3}^0 & & & & \\ \bar{P}_{i-2} & = & \bar{Q}_{i-2}^0 & \bar{Q}_{i-2}^1 & & & \\ \bar{P}_{i-1} & = & \bar{Q}_{i-1}^0 & \bar{Q}_{i-1}^1 & \bar{Q}_{i-1}^2 & & \\ \bar{P}_i & = & \bar{Q}_i^0 & \bar{Q}_i^1 & \bar{Q}_i^2 & \bar{Q}_i^3 & = Q(t) \end{array}$$

## Καμπύλες B-Spline βαθμού $k$

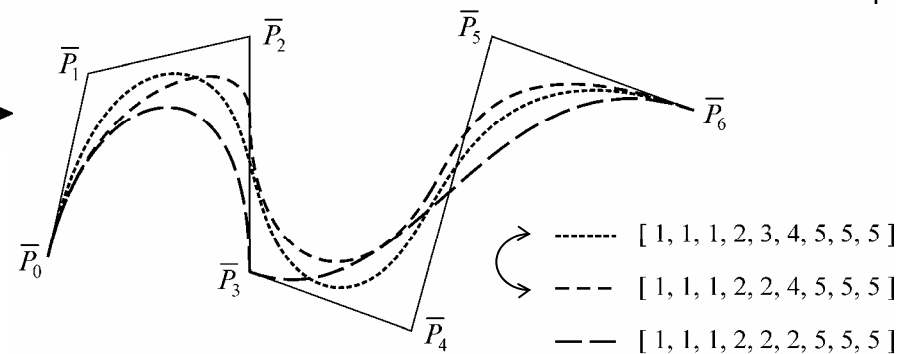
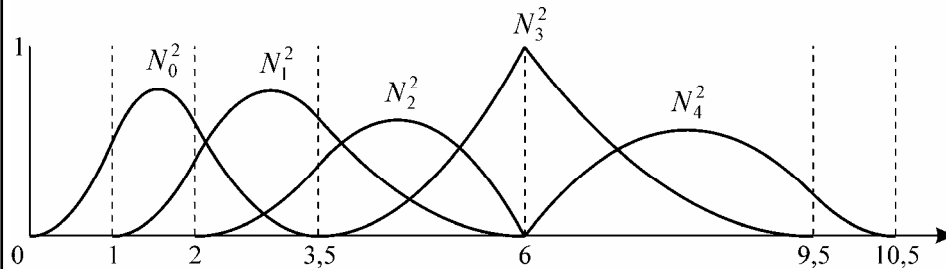
- Αλγόριθμος de Boor:
  - Υλοποίηση με 1Δ πίνακα  $k+1$  στοιχείων.
  - Αντίθετα από de Casteljau, τα βάρη συνδυασμού σημείων δεν είναι σταθερά.
- Ψευδοκώδικας υπολογισμού  $Q(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  με δείκτες πίνακα από 0 (θέτουμε  $m=j-i+k$ , οπότε  $m: 0 \dots k-r$ ).
  - Για σχεδιασμό ολόκληρης B-Spline, αρκεί η εύρεση διαδοχικών σημείων με κάποιο βήμα  $\Delta t$ .

```
for (j=i-k; j<=i; j++) {
    m=j-i+k;
    deBoor_pts[m]=control_pts[j];
}

for (r=1; r<=k; r++) {
    for (j=i; j>=i-k+r; j--) {
        m=j-i+k;
        coeff=(t-knots[j])/(knots[k-r+1+j]-knots[j]);
        deBoor_pts[m]=(1-coeff)*deBoor_pts[m-1]+coeff*deBoor_pts[m];
    }
}
```

## Ιδιότητες Κόμβων B-Spline

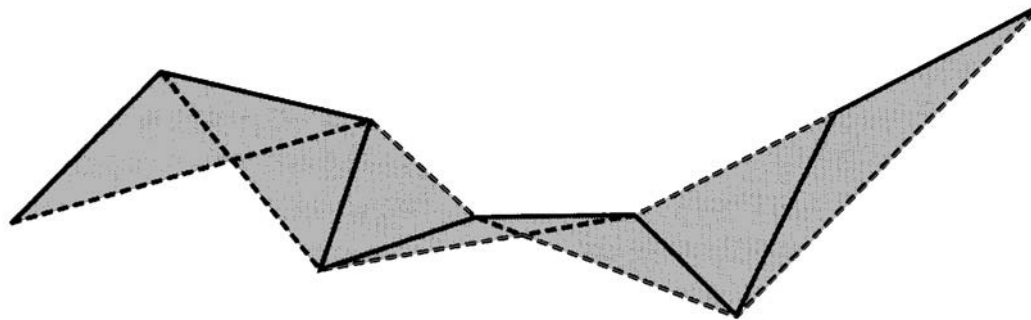
- Εστω B-Spline βαθμού  $k$  με τους  $k$  πρώτους κόμβους ίσους,  $t_1=t_2=\dots=t_k$ , (ο πρώτος κόμβος έχει “πολλαπλότητα”  $k$ ):
  - Αποδεικνύεται τότε ότι  $Q(t_1)=Q(t_k)=\bar{P}_0$  δηλ. η B-Spline (που ορίζεται στο  $[t_k, t_{n+1}]$ ) παρεμβάλλει το  $\bar{P}_0$ .
    - Αντίθετα με τις Bézier, οι B-Spline δεν παρεμβάλλουν ακραία σημεία, εκτός αν έχουμε κόμβους πολλαπλότητας  $k$  στην αρχή ή στο τέλος.
  - Γενικότερα αν  $t_i=t_{i+1}$  η  $Q(t_i)$  χάνει μια τάξη συνέχειας.
    - Αν ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα  $r$  η καμπύλη είναι  $C^{k-r}$  στο αντίστοιχο σημείο.
    - Π.χ. τετραγωνικές συναρτήσεις B-Spline με  $t_i=t_{i+1}=6$ .



- Μέγιστη πολλαπλότητα είναι  $k$  αφού διαφορετικά θα έχουμε συνέχεια μικρότερη από  $C^0$ . Άρα  $t_i < t_{i+k}$ .

## Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline

- Τοπικός Έλεγχος: το  $\bar{P}_i$  επηρεάζει μόνο το διάστημα καμπύλης  $[t_i, t_{i+k+1})$  όπου η  $N_i^k(t)$  είναι μη μηδενική.
  - Η Bézier έχει μόνο ψευδο-τοπικό έλεγχο.
- Ιδιότητα Κυρτής Περιβάλλουσας: η καμπύλη βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων ελέγχου αφού είναι κυρτός συνδυασμός τους:
  - Η συνθήκη αυτή είναι πιο ισχυρή στις B-Spline: η καμπύλη βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των  $(k+1)$  σημείων ελέγχου που ορίζουν κάθε τμήμα της.
  - Π.χ. για  $k=2$  .

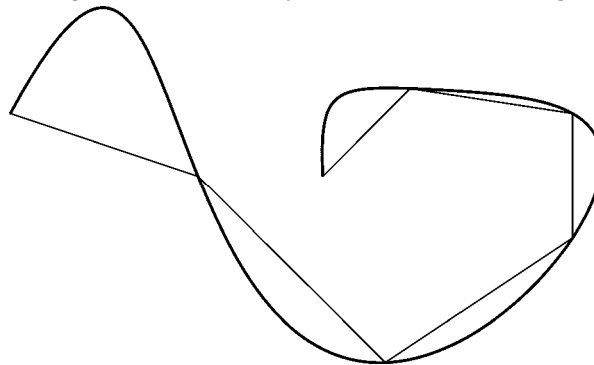


## Ιδιότητες Καμπυλών B-Spline

- Αναλλοίωτη σε Συσχετισμένους Μετασχηματισμούς: εφόσον η καμπύλη είναι συσχετισμένος συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.
  - Αρα για να μετασχηματίσουμε μια B-Spline αρκεί να μετασχηματίσουμε τα σημεία ελέγχου της.
- Αναλλοίωτη σε Συσχετισμένους Μετασχηματισμούς της Παραμέτρου της,  
 $u = a + (b - a) \cdot t$
- Γραμμική Ακρίβεια: αν τα  $\bar{P}_i$  είναι συνευθειακά, τότε η B-Spline γίνεται ευθύγραμμο τμήμα.
- Παρεμβολή Ακραίων Σημείων: με πολλαπλότητα  $k$  στους ακραίους κόμβους.
- Αποτελούν Γενίκευση των Καμπυλών Bézier.
- Πρακτικά, συνήθως χρησιμοποιούνται B-Spline χαμηλού βαθμού π.χ. 3.

## Καμπύλες Παρεμβολής

- Καμπύλες παρεμβολής: διέρχονται από δοσμένα σημεία  $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$  :
  - Συγκεκριμένα για δοσμένες τιμές της παραμέτρου  $t_0, t_1, \dots, t_n$  έχουμε  $P(t_i) = \bar{P}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$
  - (Οι καμπύλες προσέγγισης δεν διέρχονται απαραίτητα από τα  $\bar{P}_i$  )
- Παραδοσιακές μέθοδοι παρεμβολής: κατασκευή  $P(t)$  σαν πολυωνυμική καμπύλη βαθμού  $n$  :
  - Είναι μοναδική.
  - Πρέπει να προσδιορισθούν οι  $(n+1)$  συντελεστές του αντίστοιχου πολυωνύμου.
  - Λύση συστήματος εξισώσεων όχι πρακτική.
  - Αλγόριθμοι Aitken και Lagrange προτιμούνται.
- Μειονεκτήματα ύπαρξης ενός υψηλόβαθμου πολυωνύμου:
  - Πολύπλοκοι και αριθμητικά ασταθείς υπολογισμοί.
  - Υψηλόβαθμη καμπύλη παρουσιάζει ταλαντώσεις (σχήμα).





## Αλγόριθμος Aitken

- Αναδρομική μέθοδος κατασκευής πολυωνύμου βαθμού  $n$  από  $(n+1)$  σημεία:
  - Για  $n=1$  η παρεμβολή γίνεται με ευθύγραμμο τμήμα.
  - Για  $n>1$  χρησιμοποιούνται διαδοχικά βήματα γραμμικής παρεμβολής.  
Θέτουμε  $\bar{P}_i^0 = \bar{P}_i$  και
$$\bar{P}_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} \bar{P}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} \bar{P}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, n \\ i = 0, 1, \dots, n - r \end{array}$$
  - Το  $\bar{P}_0^n(t)$  είναι το σημείο της καμπύλης για την τιμή  $t \in [t_0, t_n]$  της παραμέτρου.

## Αλγόριθμος Aitken

- Απόδειξη ότι  $\bar{P}_0^n(t_i) = \bar{P}_i$  με επαγωγή:

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $n-1$  σημεία.
- Για  $n$  σημεία η  $\bar{P}_0^n(t)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P}_0^n(t) = \frac{t_n - t}{t_n - t_0} \bar{P}_0^{n-1}(t) + \frac{t - t_0}{t_n - t_0} \bar{P}_1^{n-1}(t)$$

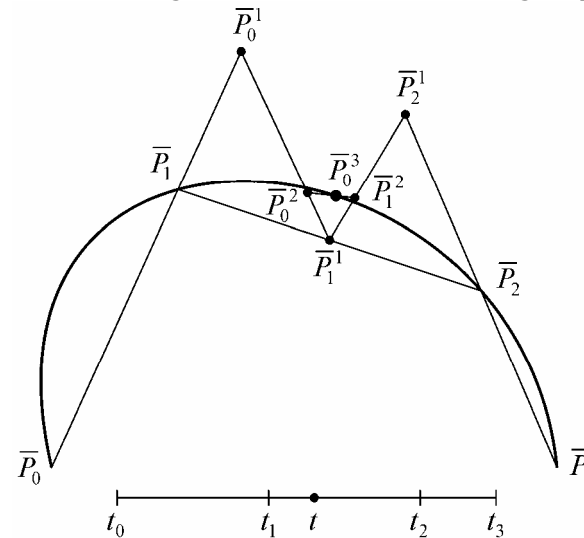
- Από την υπόθεση, οι  $\bar{P}_0^{n-1}(t)$  και  $\bar{P}_1^{n-1}(t)$  παρεμβάλλουν τα  $(n-1)$  σημεία  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_{n-1}$  και  $\bar{P}_1 \dots \bar{P}_n$  αντίστοιχα. Άρα:

$$\bar{P}_0^n(t_0) = 1 \cdot \bar{P}_0^{n-1}(t_0) + 0 \cdot \bar{P}_1^{n-1}(t_0) = \bar{P}_0^{n-1}(t_0) = \bar{P}_0$$

$$\bar{P}_0^n(t_n) = 0 \cdot \bar{P}_0^{n-1}(t_n) + 1 \cdot \bar{P}_1^{n-1}(t_n) = \bar{P}_1^{n-1}(t_n) = \bar{P}_n$$

- Για τα υπόλοιπα  $t_i, i=1, 2, \dots, n-1$  χρησιμοποιούμε την υπόθεση της επαγωγής  $\bar{P}_0^{n-1}(t_i) = \bar{P}_1^{n-1}(t_i) = \bar{P}_i, i=1 \dots n-1$  και το γεγονός ότι οι συντελεστές της  $\bar{P}_0^n(t)$  αθροίζουν στη μονάδα.

$$\begin{aligned} \bar{P}_0^n(t_i) &= \frac{t_n - t_i}{t_n - t_0} \bar{P}_0^{n-1}(t_i) + \frac{t_i - t_0}{t_n - t_0} \bar{P}_1^{n-1}(t_i) \\ &= \frac{t_n - t_i}{t_n - t_0} \bar{P}_i + \frac{t_i - t_0}{t_n - t_0} \bar{P}_i = \bar{P}_i \end{aligned}$$



## Ιδιότητες Παρεμβολής Aitken

- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς:
  - Αφού όλα τα βήματα του αλγορίθμου είναι γραμμικές παρεμβολές (συσχετισμένες απεικονίσεις).
- Απουσία ιδιότητας κυρτής περιβάλλουσας:
  - Η παράμετρος  $t$  δεν ανήκει πάντα στο διάστημα  $[t_i, t_{i+r}]$  άρα οι συντελεστές μπορεί να είναι και αρνητικοί (βλέπε προηγούμενο σχήμα).
  - Η καμπύλη δεν βρίσκεται συνολικά μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των σημείων παρεμβολής.
  - Αυτό ισχύει γενικά για λείες καμπύλες παρεμβολής.
- Γραμμική ακρίβεια:
  - Αν τα  $\bar{P}_i$  είναι συνευθειακά η καμπύλη παρεμβολής είναι ευθύγραμμο τμήμα.

## Πολυώνυμα Lagrange

- Απ' ευθείας υπολογισμός πολυωνύμου παρεμβολής βαθμού  $n$  για  $(n+1)$  σημεία:

- Τα πολυώνυμα Lagrange  $L_i^n(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της καμπύλης παρεμβολής:  $P(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \bar{P}_i$

- Τα πολυώνυμα Lagrange ικανοποιούν τη σχέση  $L_i^n(t_j) = \delta_{i,j}$

όπου  $\delta_{i,j}$  το δέλτα του Kronecker  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

- Δηλαδή το  $L_i^n$  μηδενίζεται σε όλους τους κόμβους εκτός από τον  $t_i$  για τον οποίο παίρνει τιμή 1.
- Τα πολυώνυμα Lagrange αθροίζουν στην μονάδα  $\Rightarrow$  βαρυκεντρικός συνδυασμός σημείων άρα αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετ/μούς.
- Τα πολυώνυμα Lagrange δεν είναι παντού θετικά, άρα δεν ισχύει η ιδιότητα της κυρτής περιβάλλουσας.

## Παρεμβολή κατά Τμήματα

- Aitken και Lagrange κατασκευάζουν πολυώνυμα βαθμού  $n$  για  $(n+1)$  σημεία παρεμβολής:
  - Υπολογιστικά ακριβό.
  - Ταλαντώσεις.
- Μέθοδοι κατά - τμήματα - παρεμβολής χρησιμοποιούν ακολουθία χαμηλόβαθμων παρεμβολών:
  - Υπολογιστικά φθηνό.
  - Μεγάλος έλεγχος μορφής καμπύλης (π.χ. εφαπτόμενης σε κάθε σημείο).
- Κατά - τμήματα - παρεμβολή, εξετάζουμε τριτοβάθμιες:
  - Hermite.
  - B-Spline.

## Παρεμβολή Hermite

- Κυβική παρεμβολή Hermite: τριτοβάθμια καμπύλη  $P(t)$  μεταξύ  $\bar{P}_0$  και  $\bar{P}_1$  με εφαπτομενικά διανύσματα στα άκρα  $m_0$  και  $m_1$ :

$$P(0) = \bar{P}_0 \quad P'(0) = m_0$$

$$P(1) = \bar{P}_1 \quad P'(1) = m_1$$

- 4 άγνωστοι (κυβική) και 4 δεδομένα, άρα λύνεται.
- Κάθε τριτοβάθμια καμπύλη μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των πολυωνύμων Bernstein, στη μορφή Bézier. Άρα:

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \bar{Q}_i$$

- όπου  $\bar{Q}_i$ ,  $i = 0 \dots 3$  τα σημεία ελέγχου που πρέπει να βρούμε.
- Η καμπύλη Bézier διέρχεται από τα ακραία σημεία της, άρα:

$$\bar{Q}_0 = P(0) = \bar{P}_0$$

$$\bar{Q}_3 = P(1) = \bar{P}_1$$

## Παρεμβολή Hermite

- Γνωρίζουμε ότι για τα εφαπτόμενα στα άκρα διανύσματα της καμπύλης Bézier ισχύει:

$$m_0 = P'(0) = 3(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0) \Leftrightarrow \bar{Q}_1 = \bar{P}_0 + \frac{1}{3}m_0$$

$$m_1 = P'(1) = 3(\bar{Q}_3 - \bar{Q}_2) \Leftrightarrow \bar{Q}_2 = \bar{P}_1 - \frac{1}{3}m_1$$

- Η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$P(t) = (1-t)^3 \bar{P}_0 + 3t(1-t)^2 \left( \bar{P}_0 + \frac{1}{3}m_0 \right) + 3t^2(1-t) \left( \bar{P}_1 - \frac{1}{3}m_1 \right) + t^3 \bar{P}_1$$

ή αναδιατάσσοντάς την συναρτήσει των στοιχείων ορισμού της

$$P(t) = H_0^3(t)\bar{P}_0 + H_1^3(t)m_0 + H_2^3(t)m_1 + H_3^3(t)\bar{P}_1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα πολυώνυμα Hermite 3<sup>ου</sup> βαθμού

$$H_0^3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1^3(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_2^3(t) = t^3 - t^2$$

$$H_3^3(t) = -2t^3 + 3t^2$$

## Παρεμβολή Hermite

- Αλλαγή παραμετρικού διαστήματος από  $t \in [0, 1]$  σε  $u \in [a, b]$ :
  - Συσχετισμένη αλλαγή παραμέτρου σε  $u = (1-t) \cdot a + t \cdot b$ .
  - Οι Hermite, αντίθετα από τις Bézier, δεν παραμένουν αναλλοίωτες επειδή συμμετέχει η εφαπτομένη στον ορισμό τους.
  - Για να παραμένει αναλλοίωτη μια καμπύλη Hermite, αποδεικνύεται ότι πρέπει να διαιρέσουμε τα  $m_0$  και  $m_1$  με το  $(b-a)$ :

$$m_0 = P'(a) = \frac{3(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0)}{b-a}$$

$$m_1 = P'(b) = \frac{3(\bar{Q}_3 - \bar{Q}_2)}{b-a}$$

- Η Hermite παίρνει τη μορφή:

$$P(u) = \hat{H}_0^3(u)\bar{P}_0 + \hat{H}_1^3(u)m_0 + \hat{H}_2^3(u)m_1 + \hat{H}_3^3(u)\bar{P}_1$$

όπου χρησιμοποιούμε τα μετασχηματισμένα πολυώνυμα Hermite 3<sup>ου</sup> βαθμού:

$$\hat{H}_0^3(u) = \hat{H}_0^3(t)$$

$$\hat{H}_1^3(u) = (b-a)H_1^3(t)$$

$$\hat{H}_2^3(u) = (b-a)H_2^3(t)$$

$$\hat{H}_3^3(u) = H_3^3(t)$$



## Κατά - Τμήματα Παρεμβολή Hermite

- Εστω παρεμβολή μεταξύ  $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$  με αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα  $m_0, m_1, \dots, m_n$  και τιμές παραμέτρου  $t_0, t_1, \dots, t_n$  :

– Αν  $P(u), u \in [t_0, t_n]$  η ζητούμενη καμπύλη, θα ισχύει:

$$P(t_i) = \bar{P}_i \text{ και } P'(t_i) = m_i, i = 0, 1, \dots, n$$

- Για κάθε τμήμα παρεμβολής  $P_i(u), u \in [t_i, t_{i+1}]$  έχουμε παρεμβολή μεταξύ  $\bar{P}_i$  και  $\bar{P}_{i+1}$  με ακραία εφαπτομενικά διανύσματα  $m_i$  και  $m_{i+1}$  άρα η τριτοβάθμια καμπύλη παρεμβολής Hermite είναι:

$$P_i(u) \equiv P(u) = \hat{H}_0^3(u)\bar{P}_i + \hat{H}_1^3(u)m_i + \hat{H}_2^3(u)m_{i+1} + \hat{H}_3^3(u)\bar{P}_{i+1}, u \in [t_i, t_{i+1}]$$

όπου

$$\hat{H}_0^3(u) = H_0^3(t)$$

$$\hat{H}_1^3(u) = (t_{i+1} - t_i)H_1^3(t)$$

$$\hat{H}_2^3(u) = (t_{i+1} - t_i)H_2^3(t)$$

$$\hat{H}_3^3(u) = H_3^3(t)$$

με  $t = (u - t_i)/(t_{i+1} - t_i)$  την τοπική παράμετρο.

## Κατά - Τμήματα Παρεμβολή Hermite

- Εφαπτόμενα διανύσματα δεν δίνονται πάντα στην πράξη:
  - Ανάγκη χρήσης “λογικών” εφαπτόμενων διανυσμάτων και δυνατότητα μεταβολής τους από χρήστη.
- Μέθοδος FMILL θέτει  $m_i$  στο  $\bar{P}_i$  παράλληλο στην ευθεία που ορίζεται από τα  $\bar{P}_{i-1}$  και  $\bar{P}_{i+1}$ :

$$m_i = \bar{P}_{i+1} - \bar{P}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

- Εξασφαλίζει  $C^1$  συνέχεια στις ενώσεις.
- Δεν μπορεί να υπολογίσει τα  $m_0$  και  $m_n$ .
- Η καμπύλη που δημιουργείται ονομάζεται Catmull - Rom spline.

## Κατά - Τμήματα Παρεμβολή B-Spline

- Ζητείται τριτοβάθμια B-Spline καμπύλη  $Q(t)$  που να παρεμβάλλει τα σημεία  $\bar{P}_0 \dots \bar{P}_n$  στις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου  $t_0 \dots t_n$  :

$$Q(t_i) = \bar{P}_i, \quad i = 0 \dots n$$

- Αν τα  $\bar{P}_i$  είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τα  $t_i$  (αύξουσα σειρά).
- Για να περνά η  $Q(t)$  από τα  $\bar{P}_0$  και  $\bar{P}_n$  πρέπει να έχουμε πολλαπλότητα 3 στους ακραίους κόμβους:  $t_{-2} = t_{-1} (= t_0)$  και  $(t_n =) t_{n+1} = t_{n+2}$ .
- Πρέπει να προσδιοριστούν τα σημεία ελέγχου της  $Q(t)$  δηλ. τα  $\bar{Q}_i, i = -3, -2, \dots, (n-1)$ .
  - Η τριτοβάθμια B-Spline με  $n+1$  σημεία ελέγχου  $\bar{Q}_0 \dots \bar{Q}_n$  έχει  $n+3$  κόμβους  $t_1 \dots t_{n+3}$ .
  - Αρα αφού έχουμε τους  $n+5$  κόμβους  $t_{-2} \dots t_{n+2}$ , απαιτούνται τα  $n+3$  παραπάνω σημεία ελέγχου.
- Από την εξίσωση ορισμού B-Spline έχουμε:  $\bar{P}_j = Q(t_j) = \sum_{i=-3}^{n-1} N_i^3(t_j) \cdot \bar{Q}_i$

(για τα ακραία σημεία η σχέση απλοποιείται κατευθείαν αφού γνωρίζουμε ότι  $\bar{Q}_{-3} = \bar{P}_0$  και  $\bar{Q}_{n-1} = \bar{P}_n$ ).

- Τελικά έχουμε  $n+1$  εξισώσεις με  $n+3$  αγνώστους (τα  $\bar{Q}_i$ ).
- Προσθέτουμε 2 ακόμα περιορισμούς στα 2 ακραία άγνωστα σημεία (τα  $\bar{Q}_{-2}$  και  $\bar{Q}_{n-2}$ ) και λύνουμε το σύστημα.

## Παραμετροποίηση Καμπύλων Παρεμβολής

- Ως τώρα υποθέσαμε ότι δίνονται τα σημεία παρεμβολής  $\bar{P}_i$  και οι κόμβοι  $t_i$ :
  - Συνήθως ο χρήστης απαιτεί μια ομαλή καμπύλη που να περνά από τα  $\bar{P}_i$  και δεν ενδιαφέρεται για τα  $t_i$ .
- Μια απλή λύση είναι η χρήση ισαπέχοντων κόμβων.
- Αν λάβουμε όμως υπ' όψη τη γεωμετρία των σημείων παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα.
  - Π.χ. παραμετροποίηση μήκους χορδής (απόσταση μεταξύ  $t_i$  εξαρτάται από απόσταση μεταξύ  $\bar{P}_i$ ).

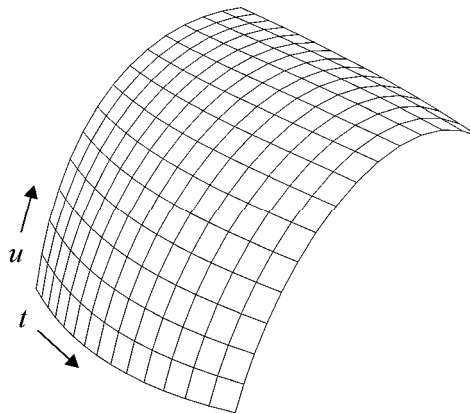
$$\frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} = \frac{|\bar{P}_{i+2} - \bar{P}_{i+1}|}{|\bar{P}_{i+1} - \bar{P}_i|}$$

## Παραμετρικές Επιφάνειες

- Παραμετρική μορφή επιφάνειας:
  - Περιλαμβάνει 2 παραμέτρους:

$$\begin{cases} x = x(t, u) \\ y = y(t, u) \\ z = z(t, u) \end{cases}$$

- Η μία παράμετρος διαγράφει μία καμπύλη ενώ η δεύτερη μετακινεί αυτή την καμπύλη στο χώρο.
- Η καμπύλη που αντιστοιχεί σε σταθερό  $u$  ή  $t$  ονομάζεται ισοπαραμετρική καμπύλη (ισοϋψείς).



## Επιφάνειες Bézier Τανυστικό Γινόμενο

- Εστω αρχική καμπύλη βαθμού  $m$  ως προς  $t$  με  $(m+1)$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_i, i = 0 \dots m$ :

$$P^m(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \bar{P}_i, \quad t \in [0, 1]$$

- Εστω ότι το κάθε  $\bar{P}_i$  διαγράφει καμπύλη βαθμού  $n$  ως προς  $u$  με σημεία ελέγχου  $\bar{P}_{ij}, j = 0 \dots n$ :

$$P_i^n(u) = \sum_{j=0}^n B_j^n(u) \bar{P}_{ij}, \quad u \in [0, 1]$$

- Τότε κάθε σημείο της αρχικής καμπύλης διαγράφει καμπύλη βαθμού  $n$  και παράγεται η επιφάνεια Bézier τανυστικό γινόμενο:
  - Η εξίσωση της επιφάνειας λαμβάνεται με αντικατάσταση του  $\bar{P}_i$  από το  $P_i^n(u)$  στην εξίσωση της αρχικής καμπύλης:

$$\begin{aligned} P^{m,n}(t,u) &= \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \left( \sum_{j=0}^n B_j^n(u) \bar{P}_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(t) B_j^n(u) \bar{P}_{ij}, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [0, 1] \end{aligned}$$

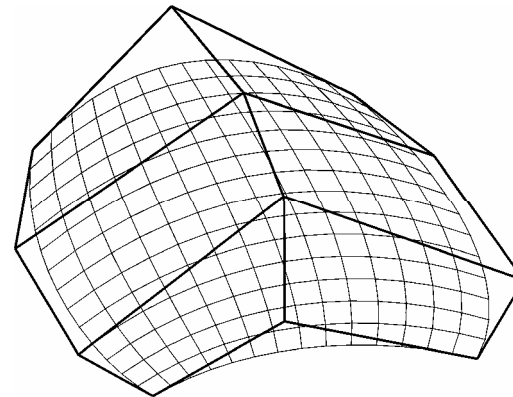
- Η αρχική καμπύλη είναι η ισοπαραμετρική καμπύλη για  $u=0$  με σημεία ελέγχου τα  $\bar{P}_i = \bar{P}_{i0}, i = 0 \dots m$

## Επιφάνειες Bézier Τανυστικό Γινόμενο

- Οι καμπύλες Bézier που χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό της επιφάνειας έχουν συνολικά  $(m+1) \times (n+1)$  σημεία ελέγχου  $\bar{P}_{ij}$ ,  $i = 0 \dots m$ ,  $j = 0 \dots n$ :
  - Αυτά ονομάζονται σημεία ελέγχου της επιφάνειας Bézier:

	$u \rightarrow$			
$t$	$\bar{P}_{00}$	$\bar{P}_{01}$	...	$\bar{P}_{0n}$
↓	$\bar{P}_{10}$	$\bar{P}_{11}$	...	$\bar{P}_{1n}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\bar{P}_{m0}$	$\bar{P}_{m1}$	...	$\bar{P}_{mn}$

- Οι ισοπαραμετρικές καμπύλες για  $u=0$ ,  $u=1$ ,  $t=0$  και  $t=1$  ονομάζονται συνοριακές καμπύλες της επιφάνειας.
- Παράδειγμα επιφάνειας Bézier βαθμών 2 και 3.



## Υπολογισμός Σημείου Επιφάνειας Bézier

- Αλγόριθμος de Casteljau για υπολογισμό  $P^{m,n}(t, u)$ 
  - Εφαρμογή de Casteljau σε κάθε γραμμή του πίνακα σημείων ελέγχου για το δεδομένο  $u$  δίνει  $(m+1)$  σημεία.
  - Εφαρμογή de Casteljau στα  $(m+1)$  νέα σημεία για το δεδομένο  $t$  δίνει το σημείο της επιφάνειας.

```
point deCasteljauSurfacePoint(int m, int n,  
                             point[][] control_pts float t, float u)  
{  
    point[] temp_pts;  
    point[] bez_pts;  
  
    for (i=0; i<=m; i++) {  
        for (j=0; j<=n; j++)  
            temp_pts[j]=control_pts[i][j];  
        bez_pts[i]=deCasteljauPoint(n, temp_pts, u);  
    }  
    return deCasteljauPoint(m, bez_pts, t);  
}
```



## Ιδιότητες Επιφανειών Bézier

- Προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των καμπύλων Bézier.
- Ιδιότητα κυρτής περιβάλλουσας.
  - Αφού είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(t) B_j^n(u) = 1$$

- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς παραμέτρων.
- Συνοριακές καμπύλες: λαμβάνονται από τις ακραίες γραμμές και στήλες του πίνακα των σημείων ελέγχου.
  - Τα 4 γωνιακά σημεία ελέγχου βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια.
- Υπάρχουν συναρτήσεις παραγώγων και κανονικού διανύσματος για κάθε σημείο  $(t, u)$  της επιφάνειας.
- Ψευδο-τοπικός έλεγχος: μέγιστη επιροή  $\bar{P}_{ij}$  στις τιμές  $(t, u) = (i/m, j/n)$  των παραμέτρων.

## Επιφάνειες B-Spline Τανυστικό Γινόμενο

- Επιφάνειες Bézier έχουν ανάλογες ιδιότητες (άρα και μειονεκτήματα) με καμπύλες Bézier.
- Επιφάνειες B-Spline τανυστικό γινόμενο βαθμού  $k$  ως προς  $t$  και  $l$  ως προς  $u$  ορίζονται ανάλογα με επιφάνειες Bézier:
  - Συνενώνονται με  $C^{k-1}$  ως προς  $t$  και  $C^{l-1}$  ως προς  $u$ .
  - Χρήση πίνακα  $(m+1) \times (n+1)$  σημείων ελέγχου  $\bar{P}_{ij}$ ,  $i = 0 \dots m$ ,  $j = 0 \dots n$  (τα  $m$  και  $n$  είναι ανεξάρτητα από τα  $k$  και  $l$ ).

$$Q^{m,n}(t,u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_i^k(t) N_j^l(u) \bar{P}_{ij}$$

- Ακολουθίες  $(m+k)$  κόμβων ως προς  $t$  και  $(n+l)$  κόμβων ως προς  $u$  (ανεξάρτητες μεταξύ τους)
 

$t_1, t_2, \dots, t_{m+k}$	$u_1, u_2, \dots, u_{n+l}$
----------------------------	----------------------------
- Ανάγκη πλασματικών κόμβων  $t_0, t_{m+k+1}, u_0, u_{n+l+1}$  για ορισμούς.
- Πεδίο ορισμού  $[t_k, t_{m+1}] \times [u_l, u_{n+1}]$ .
- Στοιχεία ελέγχου επιφάνειας B-Spline:

		$u_1$	$\dots$	$u_n$	$\dots$	$u_{n+l}$
	$\bar{P}_{00}$	$\bar{P}_{01}$	$\dots$	$\bar{P}_{0n}$		
$t_1$	$\bar{P}_{10}$	$\bar{P}_{11}$	$\dots$	$\bar{P}_{1n}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$		
$t_m$	$\bar{P}_{m0}$	$\bar{P}_{m1}$	$\dots$	$\bar{P}_{mn}$		
$\vdots$						
$t_{m+k}$						

- Υπολογισμός σημείου επιφάνειας  $Q^{m,n}(t,u)$  με διπλή εφαρμογή αλγορίθμου de Boor.

## Ιδιότητες Επιφανειών B-Spline

- Ιδιότητες κόμβων: αντίστοιχες με καμπύλες B-Spline.
  - Π.χ. αν οι  $k$  πρώτοι κόμβοι ως προς  $t$  είναι ίσοι, η επιφάνεια παρεμβάλλει την ισοπαραμετρική καμπύλη του  $t = t_0 = t_k$ .
- Παραμετροποίηση πολύ πιο δύσκολη από καμπύλες B-Spline:
  - Επειδή υπάρχουν μόνο 2 ακολουθίες κόμβων  $t$  και  $u$ .
  - Π.χ. για παραμετροποίηση μήκους χορδής, ποια από όλες τις καμπύλες θα επιλέξουμε;
  - Μέσος όρος δεν δίνει καλά αποτελέσματα αν διαδοχικές καμπύλες έχουν μεγάλη διαφορά.
- Τοπικός έλεγχος:  $\bar{P}_{ij}$  επηρεάζει το τμήμα καμπύλης  $[t_i, t_{i+k+1}) \times [u_j, u_{j+l+1})$ .
- Ιδιότητα κυρτής περιβάλλουσας:
  - Αφού η επιφάνεια B-Spline είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων ελέγχου της.
  - Στις B-Spline η ιδιότητα αυτή είναι πιο ισχυρή: ένα σημείο της επιφάνειας βρίσκεται μέσα στην κυρτή περιβάλλουσα των  $(k+1) \times (l+1)$  σημείων υπολογισμού του.
  - Αρα η επιφάνεια βρίσκεται μέσα στην ένωση αυτών των κυρτών περιβαλλουσών.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς.
- Αναλλοίωτη κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς των παραμέτρων της.

## Παρεμβολή με Επιφάνειες B-Spline

- Εστω παρεμβολή πλέγματος σημείων του τρισδιάστατου χώρου με δικυβικές επιφάνειες B-Spline τανυστικό γινόμενο:

- $(m+1) \times (n+1)$  σημεία  $\bar{P}_{ij}$ ,  $i = 0 \dots m$ ,  $j = 0 \dots n$  προς παρεμβολή με τις ακολουθίες παραμέτρων  $t_i$ ,  $i = 0 \dots m$ ,  $u_j$ ,  $j = 0 \dots n$ .

- Ζητείται B-Spline επιφάνεια  $Q(t, u)$ :

$$Q(t_i, u_j) = \bar{P}_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n \end{array}$$

- Παρεμβολή επιτυγχάνεται με γενίκευση μεθόδου παρεμβολής B-Spline καμπύλης.

## Επιφάνειες Τανυστικό Γινόμενο - Γενικά

- Έχουν απλή μαθηματική μορφή και προκύπτουν εύκολα σαν γενίκευση των αντίστοιχων καμπύλων.
- Κύριο μειονέκτημα: ανάγκη τετραγωνικής διάταξης σημείων ελέγχου.
  - Ειδικά για τις B-Spline πρέπει να έχουν και σχετικά ομοιόμορφη κατανομή, λόγω της μοναδικής παραμετροποίησης σε κάθε κατεύθυνση.